Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ a PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Matematika – Informatika

WEBOVÉ STRÁNKY PRO VÝUKU FUNKCÍ NA STŘEDNÍ ŠKOLE

WEBSITES FOR TEACHING OF FUNCTIONS AT HIGH SCHOOL

Bakalářská práce: 13-FP-KMD-009

Autor:

Ondřej VRAŠTIL

Podpis:

Vedoucí práce: RNDr. Dana Černá, Ph.D.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
39	0	20	0	7	0

V Liberci dne: 20. 12. 2013

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Ondřej Vraštil**
Osobní číslo:	**P10000564**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Informatika se zaměřením na vzdělávání** **Matematika se zaměřením na vzdělávání**
Název tématu:	**Webové stránky pro výuku funkcí na střední škole**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Student prostuduje dostupné učebnice, sbírky úloh a webové stránky týkající se základních funkcí. Na základě prostudované literatury vytvoří vlastní webové stránky, které budou sloužit jako pomůcka pro výuku funkcí na střední škole. Na stránkách bude umístěna teorie, řešené i neřešené příklady a také interaktivní testy.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

[1] **BARTSCH, H. J., Matematické vzorce. SNTL, Praha, 2006. ISBN 80-200-1448-9.**
[2] **COURANT, E., ROBBINS, H., What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. Oxford University Press, 1996. ISBN 978-01-951-0519-3.**
[3] **ECCHER, C., Profesionální webdesign, 2. vydání, Computer Press, Brno, 2010. ISBN 978-80-251-2677-6.**
[4] **ODVÁRKO, O., Matematika pro gymnázia ? Funkce. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-164-2.**
[5] **POLÁK, J., Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-356-1.**
[6] **Ročenky české matematické olympiády.**
[7] **http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/**

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Dana Černá, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **17. dubna 2012**
Termín odevzdání bakalářské práce: **26. dubna 2013**

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne

Čestné prohlášení

Název práce:	Webové stránky pro výuku funkcí na střední škole
Jméno a příjmení autora:	Ondřej Vraštil
Osobní číslo:	P10000564

Byl/a jsem seznámen/a s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložil/a elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedl/a jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 20. 12. 2013

Ondřej Vraštil

Poděkování

Rád bych zde poděkoval paní RNDr. Daně Černé, Ph.D. za velmi trpělivé a ochotné vedení mé bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině a všem mým blízkým za podporu, bez které by práce nemohla vzniknout.

Anotace

Bakalářská práce se zaměřuje na tvorbu internetových stránek pro výuku funkcí na střední škole. V první části jsou nejprve vysvětleny některé pojmy z oblasti tvorby www stránek, které se objevují v dalších částech práce. V druhé části se práce věnuje teorii funkcí, ve které zavádí pojem funkce a popisuje druhy funkcí, jmenovitě lineární, s absolutní hodnotou, kvadratickou, lineární lomenou, racionální, polynomickou, mocninnou, exponenciální a logaritmickou. V třetí části jsou představeny internetové stránky, které byly výstupem této práce. Je zde popsána část z obsahu stránek, jejich vzhled a zaměření. Čtvrtá kapitola je věnovaná vývojovému prostředí, konkrétně programu Geogebra. Práce popisuje tvorbu appletu a také program samotný. Výstup práce ve formě internetových stránek je k dispozici na přiloženém CD. Tyto stránky zavadí poznatky z teoretické části do praxe a slouží jako výuková pomůcka.

Klíčová slova: funkce, výuka, GeoGebra, applet, střední škola

Annotation

The bachelor work is aimed at the creation of website for the teaching of functions at secondary school. In the first part, some terms from the area of the creation of website, which appear in the next parts of the work, are explained. The second part of the work is dedicated to the theory of functions, in which the term of function and also different kinds of functions are explained, namely linear, with absolute value, quadratic, refracted linear, rational, polynomial, power, exponential and logarithmic. In the third part, the website that was the outcome of the work, is introduced. A part of its content, appearance and specialization is described there. The fourth chapter is dedicated to development environment and specifically to the Geogebra program. The work describes the creation of applet and also the program itself. The outcome of the work in the form of the website is available on the enclosed CD. This website introduces the finding of the theoretical part into the practice and functions as an educational aid.

Key words: functions, teaching, GeoGebra, applet, secondary school

Obsah

Seznam Obrázků

Úvod

Ve své práci se věnuji tvorbě internetových stránek pro výuku funkcí na střední škole. V textu této práce nejdříve vysvětluji základní pojmy z oblasti tvorby www stránek. V další části rozebírám teorii funkcí z hlediska matematiky. Účelem tohoto rozboru není osvětlit problematiku funkcí podrobně, ale poskytnout teoretický základ pro tvorbu matematických appletů. Dále popisuji webové stránky, které jsem v rámci práce vytvořil. Zaměřuji se nejen na obsah stránek, ale i předkládám svůj koncept, jak by měla webová stránka pro výuku vypadat. Teoretickou část zakončuje popis použitého vývojového prostředí, konkrétně softwaru Geogebra. Představuji jak aplikaci samotnou, tak i způsob, jak jsem s ní pracoval.

Cílem bakalářské práce je vytvořit webové stránky, které prezentují látku matematických funkcí poutavě a zábavně, zatímco se snaží v největší možné míře využívat potenciálu výpočetní techniky a jejího přínosu v procesu edukace. Stránky jsou přehledné, mají líbivý vzhled.

1 Pojmy z oblasti tvorby www stránek

1.1 Jazyk HTML

„Jazyk HTML je jazykem pro specifikaci rozvržení dokumentu a hypertextových odkazů (hyperlinků). Definuje syntaxi a rozmístění speciálních vložených příkazů, které se v prohlížeči přímo nezobrazují, ale které řídí způsob zobrazení obsahu dokumentu, včetně textu, obrázků a ostatních podpůrných medií.“ [1]. Jinak řečeno, HTML je druh kódu, ze kterého je tvořena webová stránka. Tomuto kódu rozumí internetový prohlížeč a podle něj stránku zobrazí. Můžeme také říct, že kód v HTML souboru webové stránky definuje její vzhled v prohlížeči.

1.2 Programovací jazyk Java

Java je objektově orientovaný programovací jazyk vytvořený firmou SUN, který byl představen v roce 1995. Původně měl být používán v běžných elektronických zařízeních jako je trouba nebo lednička, jeho uplatnění v současnosti je ale mnohem širší. Výhodou a důvodem jeho velkého úspěchu je verifikační fáze při spouštění programu. Díky ní je spuštěný program velice bezpečný. Další jeho výhodou je fakt, že jazyk Java je nezávislý na platformě, na které je spuštěn, potřebuje pouze tzv. interpret. [2 s. 20]

Programy napsané v Javě se rozdělují na dvě velké skupiny. První jsou aplikace, které se dají popsat jako běžné programy, které spouštíme v počítači. Druhou skupinou jsou applety, které se používají na www stránkách

1.3 Java applet

Java appletem nazýváme aplikaci napsanou v programovacím jazyce Java, která je obsažena na internetové stránce. Jedná se vlastně o samostatný program, který je spustitelný přímo z internetového prohlížeče, uživatel tedy tuto aplikaci nemusí stahovat a instalovat. Její hlavní význam je v rozšíření schopností a interaktivity stránky, které samotný HTML kód nezvládne. Výhody Java appletu jsou v jeho kompatibilitě napříč počítačovými platformami. Je spustitelný jak na počítačích s operačním systémem Windows, tak i na počítačích s OS X od firmy Apple nebo na operačním systému Linux a všech jeho distribucích. Je tedy kompatibilní s drtivou většinou počítačů vyskytujících se v domácnostech. Pro spuštění je potřeba pouze instalace samotné Javy, která se stará o běh appletů a poté její průběžnou aktualizaci z důvodů bezpečnostních rizik.

Java applety dokáží zobrazovat různé druhy grafického a textového obsahu a měnit ho podle akcí uživatele. Jsou tedy vhodné pro demonstraci různých situací, proto se velmi hodí i pro vyučování. Dokáží zobrazit i 3D grafiku, takže jsou vhodné i pro složitější aplikace, například zobrazování geometrických těles. [3]

2 Teorie funkcí

Obsahem následující kapitoly je teorie funkcí zpracovaná z učebnice pro gymnázia, přibližně ve stejném rozsahu, v jakém se vyskytuje na vytvořených webových stránkách.

2.1 Funkce a její graf

Nejdříve si samotný pojem funkce nadefinujeme:

> „Funkce na množině $A \subset \mathbb{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá definiční obor funkce.“ [4 s. 9]

Definice zavádí hned dva pojmy – funkce a definiční obor funkce. Jednoznačné přiřazení si můžeme vysvětlit oklikou, příkladem ze světa kolem nás. Představte si nějakou firmu, která má určitý počet zaměstnanců. Tito zaměstnanci tvoří naši množinu A. Každý z těchto zaměstnanců má v podniku jednu pozici, je mu **jednoznačně přiřazena**, ale na stejné pozici může být více zaměstnanců. Stejně tak funkce přiřazuje každému číslu z množiny A jedno reálné číslo. Definičním oborem poté rozumíme množinu A, kde každému prvku bude přiřazeno jedno reálné číslo. Definiční obor funkce f značíme $D(f)$, funkce malým písmenem f, g, h, a podobně.

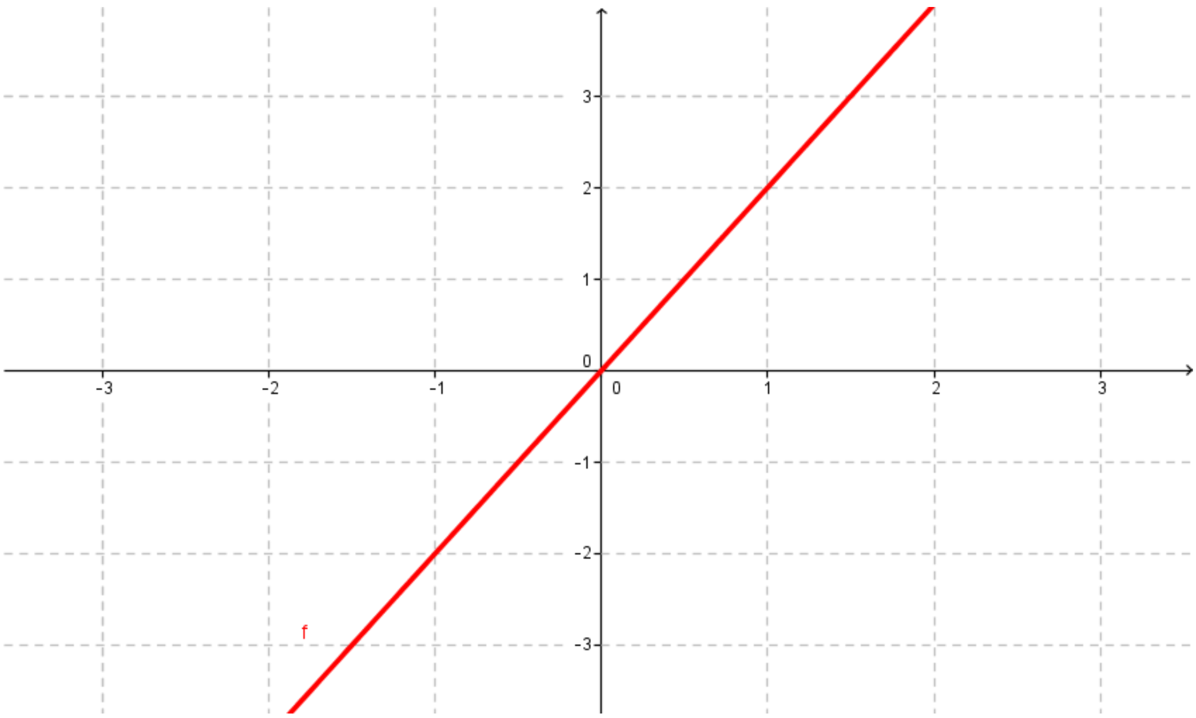
Funkce můžeme zapsat různými způsoby. Obvykle k tomu používáme písmena x a y. Číslem x označujeme nějaké číslo z D_f a nazýváme jej proměnou funkce. Číslo y je to číslo, které mu přiřazujeme, nazýváme jej funkční hodnotou. Funkci f, která přiřadí každému x z $D(f)$ jeho dvojnásobek zapíšeme takto: $f: y = 2x$. Alternativní kratší zápis je $f(x) = 2x$, neboli funkční hodnota funkce f v bodě x se rovná dvojnásobku x.

Ke každé funkci patří také její definiční obor. Ten označujeme jako interval nebo množinu, například $x \in \mathbb{R}, x \in (5; 4), x \in \{1; 2; 3\}$.

Grafem funkce můžeme nazvat grafické znázornění funkce v kartézském souřadném systému. Definice říká:

Graf funkce f ve zvolené soustavě souřadnic O_{xy} v rovině je množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde x patří do definičního oboru funkce f. [4 s. 13]

Pomocí grafu můžeme číst hodnoty $f(x)$ pro jednotlivá x, protože pro každé x z $D(f)$ existuje právě jeden takový bod $f(x)$. Je nutné zdůraznit, že z grafu dokážeme zobrazit v jednu chvíli jen určitou část, proto nemusíme vidět všechny jeho body. Na obrázku níže je zobrazen graf funkce $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$. My vidíme ale jen její určitou část, zobrazen není například bod $[-5, 10]$, který do grafu funkce patří (viz Obrázek 1).



Obrázek 1: Graf funkce

2.2 Obor hodnot

Obor hodnot úzce souvisí s pojmem definiční obor. Pokud jsme řekli, že definiční obor je nějaká množina prvků A, kterým přiřazujeme nějaké reální číslo, pak obor hodnot je množina všech hodnot, které jsme přiřadili. Pokud bychom se drželi našeho příkladu s firmou, obor hodnot by byla množina všech pozic, které může zaměstnanec zastávat. Definice říká:

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$. [4 s. 15]

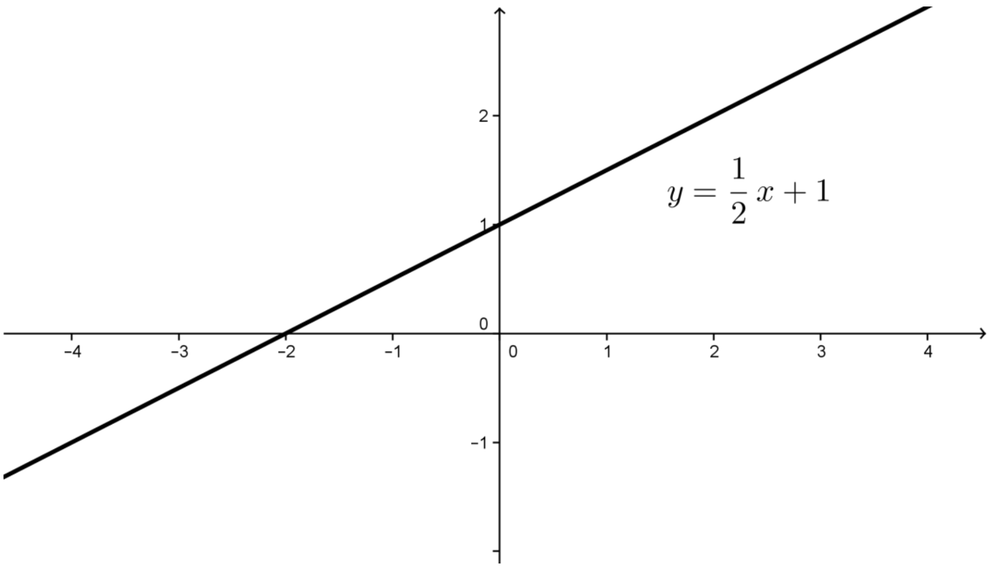
Obor hodnot funkce f značíme $H(f)$.

2.3 Lineární funkce

Předpis určující lineární funkci vyčteme z její definice:

Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána ve tvaru $y = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla. [4 s. 26]

Grafem této funkce je přímka, která bude procházet bodem $[0, b]$ (viz Obrázek 2). Stejně tak, jako je přímka určena dvěma body, pro určení grafu a předpisu funkce nám stačí znát právě dva body této funkce.



Obrázek 2: Graf lineární funkce

Můžeme určit speciální případy této funkce, a to podle hodnoty parametrů, které ji určují. Pokud je parametr $a = 0$, tj. funkce s předpisem $y = b$, poté funkci nazýváme **konstantní**. Grafem této funkce je přímka rovnoběžná s osou x. Příkladem konstantní funkce může být například vzdálenost dvou objektů v závislosti na čase v případě, kdy se ani jeden z objektů nehýbe.

Druhým případem jsou lineární funkce s parametrem $b = 0$, tj. funkce s předpisem $y = ax$. Takovéto funkce popisují **přímou úměrnost**. Graf této funkce vždy prochází počátkem souřadnic, bodem $[0,0]$. Příkladem takovéto funkce může být převod jedné měny na druhou, kde parametr a bude směnným kurzem.

2.4 Funkce absolutní hodnota

„Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $|a|$, pro které platí:

je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$,

je-li $a < 0$, je $|a| = -a$.“ [4 s. 41]

Absolutní hodnota z nezáporného čísla a má stejnou hodnotu jako číslo a. Pokud je a záporné, jeho absolutní hodnota je kladná, protože jakékoliv záporné číslo vynásobené koeficientem -1 je kladné. Funkce absolutní hodnota je funkce s předpisem $y = |x|$ na množině ℝ.

Absolutní hodnotu můžeme tvořit nejen z reálného čísla, ale i z celých funkcí. Absolutní hodnota funkce $|f|$ přiřazuje každému x z $D(f)$ absolutní hodnotu z $f(x)$, matematickým zápisem vyjádřeno:

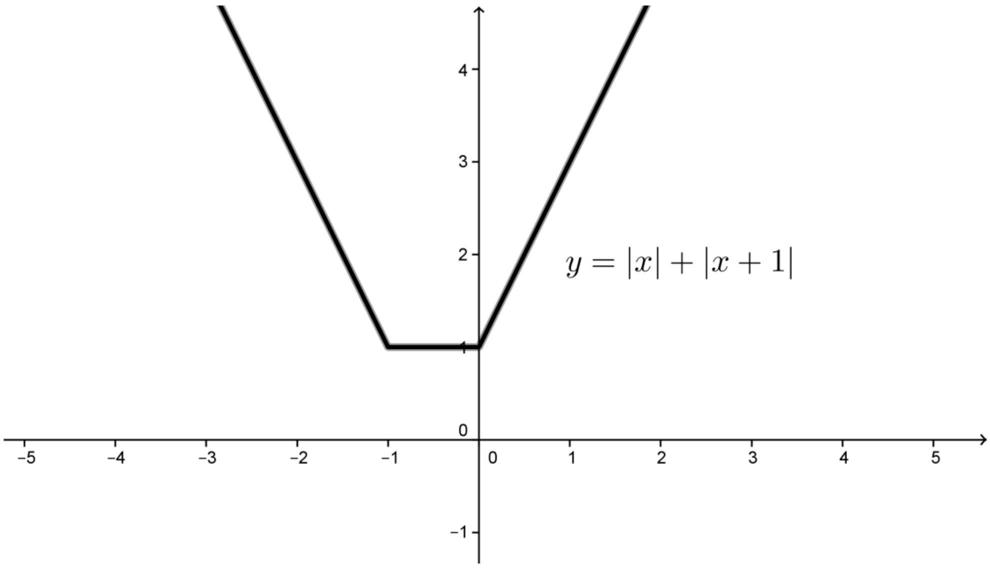
$$|f|: y = |f(x)|, x \in Df = D(|f|).$$ [5 s. 159]

Na grafu se to projeví jako překlopení všech částí grafu funkce f, které jsou pod osou (mají $f(x) < 0$) v osové souměrnosti s touto osou, část grafu funkce nad osou zůstane nezměněna. Výsledný graf bude složením grafu dvou funkcí:

1. . $f_1: y = f(x)$ pro všechna $f(x) \geq 0$,
2. $f_2: y = -f(x)$ pro všechna $f(x) < 0$.

Pokud řešíme funkci s více absolutními hodnotami, je potřeba rozdělit definiční obor funkce na intervaly, podle toho, kde je základ těchto absolutních hodnot kladný nebo záporný. Příkladem uveďme funkci $y = |x| + |x + 1|$. Graf této funkce je složením grafů tří lineárních funkcí (viz Obrázek 3):

1. . $f_1 : y = -2x + 1,\ x = (-\infty; -1)$,
2. $f_2 : y = 1,\ x = \langle -1; 0)$,
3. $f_3 : y = 2x + 1,\ x = \langle 0; \infty)$.



Obrázek 3: Graf funkce s dvěma absolutními hodnotami

2.5 Kvadratická funkce

„Kvadratická funkce je každá funkce na množině ℝ (tj. o definičním oboru ℝ), daná ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}, b, c \in \mathbb{R}$." [4 s. 58]

Kvadratická funkce se od lineární odlišuje tzv. kvadratickým členem ax^2. Grafem kvadratické funkce je parabola procházející bodem $[0, c]$ (viz Obrázek 4). Pokud $b = 0$, je graf souměrný podle osy y. Pozice vrcholu paraboly je závislá na parametrech funkce:

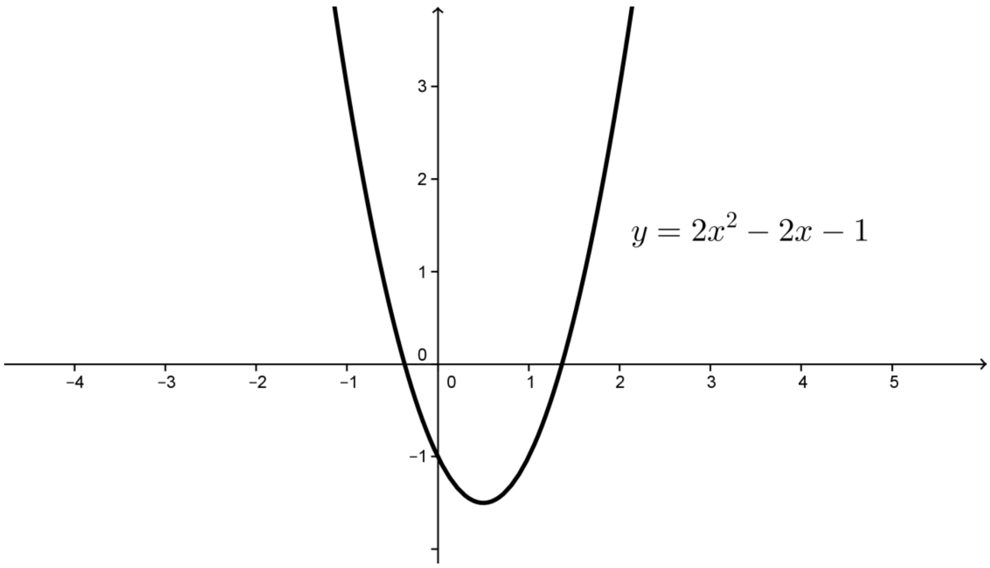
1. Pro $b = 0, c = 0$ je to počátek soustavy O.
2. Pro $b = 0, c \neq 0$ je to bod $[0, c]$.
3. Pro $b \neq 0, c \neq 0$ je to bod $\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

Bod $\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ jsme dostali z operace zvané „doplnění na čtverec":

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \text{ [5 s. 145]}$$

Průsečík s osou y má funkce vždy jeden, a to bod $[0, c]$. Počet průsečíků s osou x je stejný jako počet kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. V závislosti na parametrech rovnice tohoto druhu v $\mathbb{R}$:

1. Pro $b^2 - 4ac < 0$ nemá řešení.
2. Pro $b^2 - 4ac = 0$ má jedno řešení.
3. Pro $b^2 - 4ac > 0$ má dvě řešení.



Obrázek 4: Graf kvadratické funkce

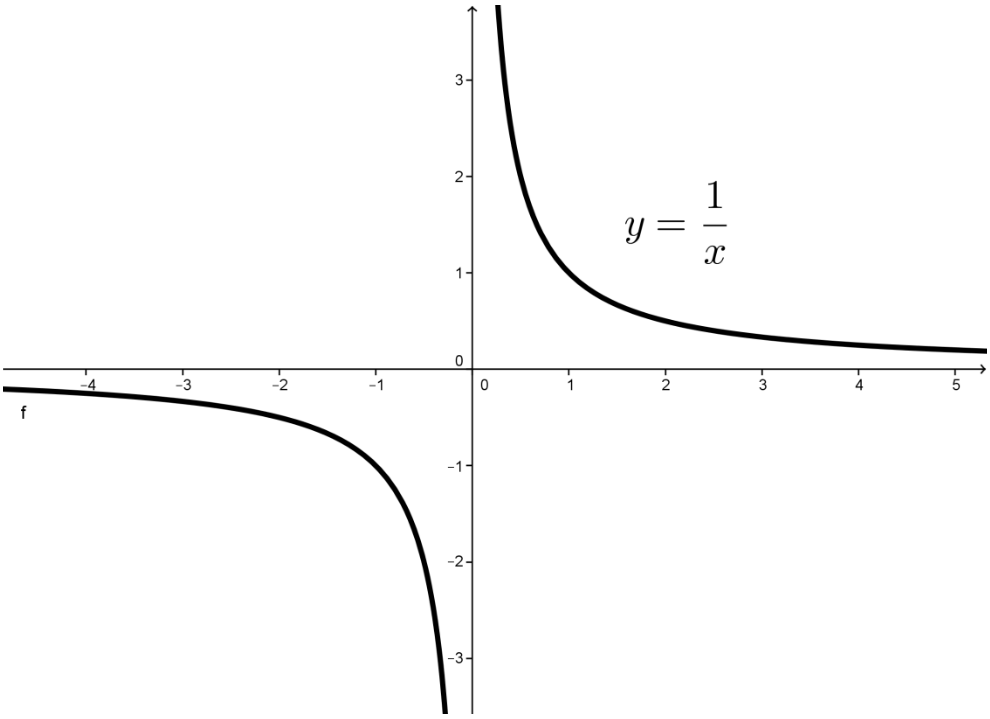
2.6 Lineárně lomená funkce

Předpis lineárně lomené musí splňovat následující definici:

„Lineárně lomená funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, vyjádřená ve tvaru $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla, c $\neq 0$, $ad - bc \neq 0$." [4 s. 81]

Grafem této funkce je rovnoosá hyperbola se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right]$. Její asymptoty jsou rovnoběžné s osami souřadnic.

Nepřímou úměrnost popisují všechny funkce na $\mathbb{R}$ dané ve tvaru $y = \frac{k}{x}$, kde k je číslo různé od nuly. Grafem takovéto funkce je hyperbola se středem v počátku souřadnic, její osy jsou shodné s osami souřadnic.



Obrázek 5: Graf přímé úměrnosti

2.7 Racionální a polynomické funkce

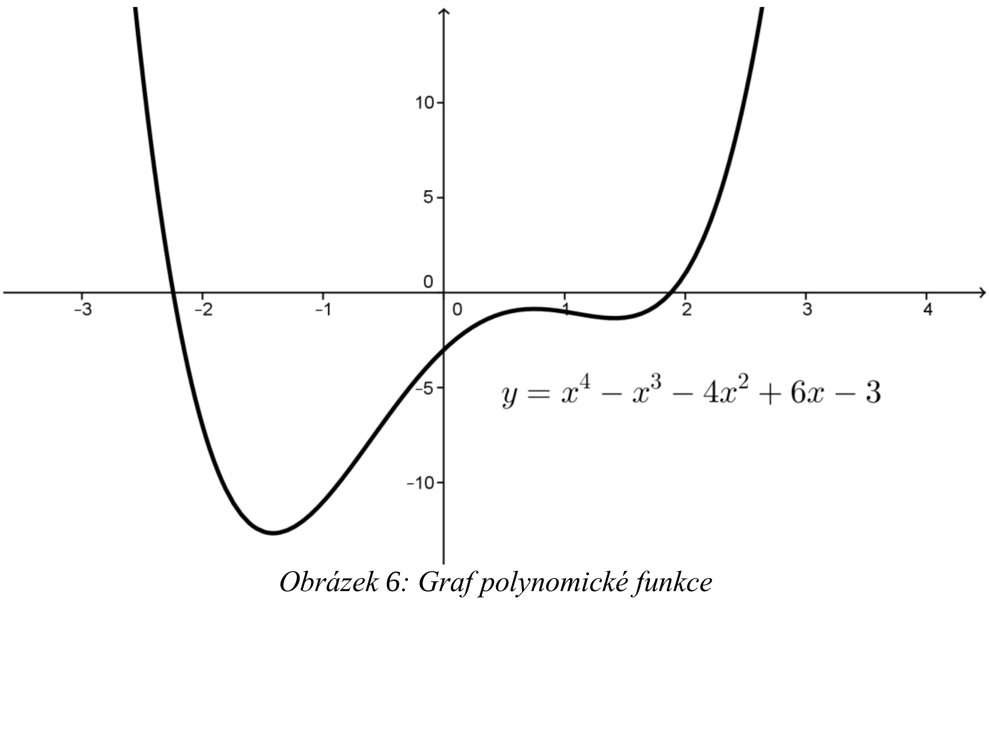
Racionální funkce je každá funkce daná ve tvaru

$$y = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $a_m, \dots a_0, b_n, \dots, b_0$ jsou reálná čísla, $b_n \neq 0$. Tato funkce je definována na množině $\mathbb{R}$, kromě kořenů rovnice

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0.$$

Racionálním funkcím, kde je jmenovatel roven jedné, říkáme polynomické funkce. Grafem je spojitá křivka (viz Obrázek 6), definičním oborem je množina $\mathbb{R}$. [4 s. 82-83]



Obrázek 6: Graf polynomické funkce

Lineární a kvadratická funkce jsou speciálními případy polynomické funkce, zatímco lomená funkce je případ funkce racionální.

2.8 Mocninné funkce

Teorii mocninných funkcí můžeme rozdělit na mocninné funkce s exponentem přirozeným, celým záporným a racionálním.

První jmenované jsou funkce ve tvaru $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Grafy těchto funkcí jsou spojité křivky procházející počátkem souřadnic. Pokud je číslo n sudé, je grafem křivka symetrická podle osy y. V případě, že je n liché, je grafem křivka souměrná podle počátku souřadnic.

Mocninné funkce s celým záporným exponentem mají tvar $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Průběh grafu se opět odvíjí od toho, zda je n sudé nebo liché. Pro n liché je graf podobný hyperbole se středem v bodě $[0,0]$. Pro n sudé jsou to dvě křivky souměrné podle osy y.

Mocninné funkce s racionálním exponentem jsou všechny funkce ve tvaru $y = x^{\frac{m}{n}}$, kde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, v definičním oboru pravé strany. [4]

2.9 Exponenciální funkce

„Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině $\mathbb{R}$ vyjádřená ve tvaru $y = a^x$, kde a je kladné číslo různé od 1.“ [4 s. 119]

Díky tomu, že je funkce definovaná na $\mathbb{R}$ a $a^0 = 1$ pro jakékoliv a různé od 0, grafem této funkce bude spojitá křivka procházející bodem $[0,1]$. Funkce musí procházet také bodem $[1, a]$, protože $a^1 = a$. Oborem hodnot je interval $(0, \infty)$.

2.10 Logaritmické funkce

Logaritmická funkce přiřazuje každému x takové y, že $a^y = x$, kde a je libovolné kladné číslo, různé od jedné. Zapisujeme ji $y = \log_a x$. Definičním oborem je množina $(0, \infty)$, oborem hodnot je množina $\mathbb{R}$. Grafem je spojitá křivka procházející bodem $[1,0]$ a $[a, 1]$. [4]

3 Popis stránek

3.1 Cílová skupina

Cílová skupina mých stránek jsou všichni ti, kteří se věnují problematice funkcí, tedy žáci příslušných ročníků odborných středních škol a gymnázií. Pro ně tyto stránky slouží jako učební opora k prohloubení znalostí, nebo jejich ověření. Mohou být použity také učiteli matematiky jako didaktická pomůcka při hodině, například pro demonstraci různých druhů grafů. Všem jmenovaným i veřejnosti jsou stránky k dispozici z adresy funkce.photovrastil.cz.

3.2 Zaměření stránek

V prvním kroku tvorby webových stránek bylo stěžejní vytvořit celkový koncept. Základem pro mě bylo nalezení role stránek v edukaci žáka. Stránky by neměly nahrazovat učitele. Jeho role je v procesu nenahraditelná, protože dokáže (v ideálním případě) flexibilně reagovat na žákovy dotazy, vcítit se do jeho procesu myšlení, a díky tomu opravit chyby, kterých se v tomto procesu dopouští, nebo rozvíjet jeho morální hodnoty. Všechny tyto aspekty nedokáže sebelepší dnešní internetová stránka obsáhnout.

Další koncept, jenž se nabízí, je náhrada učebnice. To je ale nevhodné z mnoha důvodů. Vyučování matematiky ve většině dnešních českých škol neprobíhá v počítačových učebnách, je s výpočetní technikou propojeno jen okrajově, stránky by proto nebyly pro žáky dostupné většinu času výuky. Proto jsem zaměřil svoji práci tak, aby učebnici pouze doplňovala a nabízela pro žáky takové možnosti, jaké tištěný text nemá. Po uvážení všech těchto aspektů jsem zvolil formát stránek, který spolupracuje s učebnicí, ale snaží se výuku doplňovat o množství interaktivních prvků, konkrétně Java appletů. Ty můžou být použity dvěma způsoby.

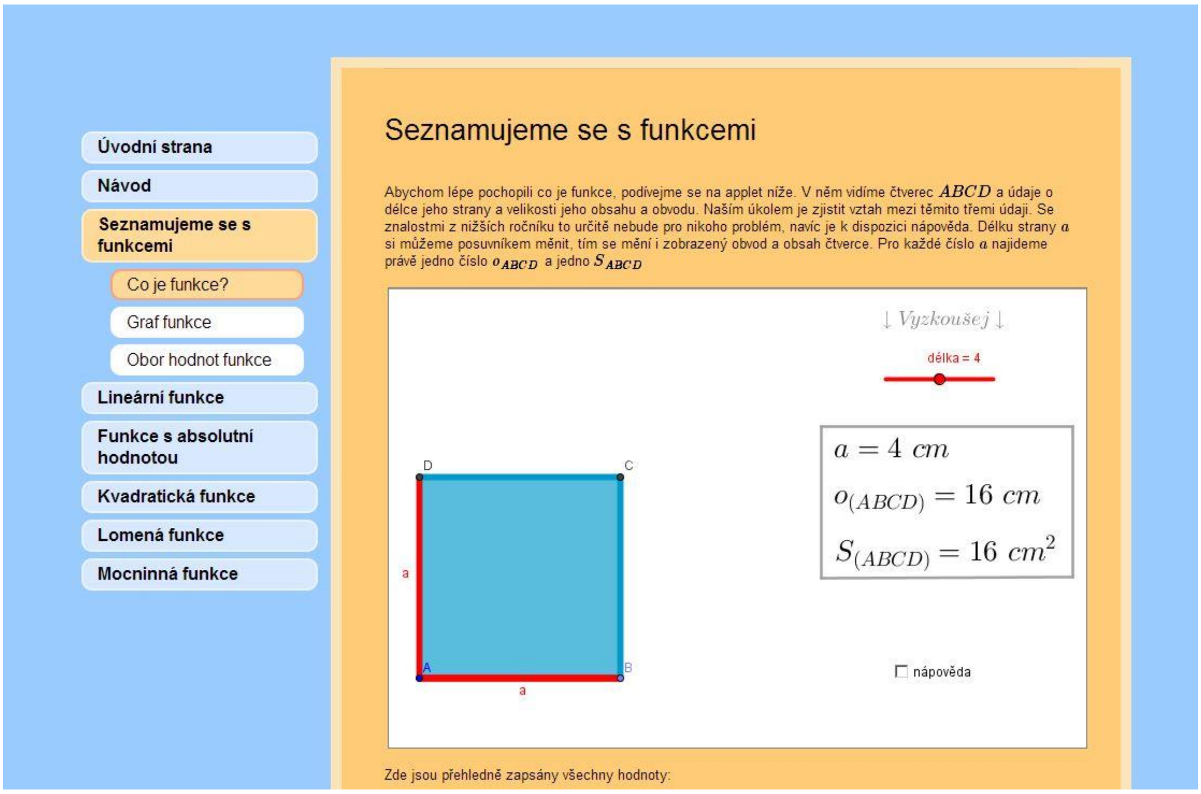
V tom prvním prezentuje stránky a applety učitel na datovém projektoru. To mu může výuku zjednodušit a obohatit o další prvek, je tedy pestřejší. Také nemusí některé skutečnosti kreslit na tabuli, tudíž dochází i k úspoře času.

Druhý zamýšlený způsob používání stránek je při domácím procvičování samotnými žáky. Pokud žák v průběhu vyučovací hodiny probírané látce neporozumí, může mu tato stránka s pochopením učiva pomoci. Pokud žák látku ovládá, jsou k dispozici kontrolní testy.

3.3 Design stránek

Zadání práce ukládalo vytvořit internetové stránky pro výuku na střední škole, proto i jejich vzhled musel splňovat určitá specifika. V první řadě bylo nutné vytvořit prezentaci přehlednou a vizuálně čistou, aby se její návštěvník mohl snadno orientovat a plně soustředit na řešení úkolu a nebyl rušen nevhodnými prvky. Proto byla zvolena jednoduchá kombinace dvou barev – světle modré a světlé hnědooranžové, při použití tmavého textu. Tato barevná kombinace dokáže žáka zaujmout, text na ní je čitelný, ale zároveň není nijak křiklavá, ani rušivá. Kontrast je dostatečný i k promítání pomocí projektoru

.



Obrázek 7: Vzhled stránek

3.4 Ukázky z obsahu stránek

Také členění stránek je velmi zjednodušeno. Na levé straně se nachází menu, vpravo od něj je samotný obsah stránek. Toto členění nebylo zvoleno na základě osobních preferencí ale z praktických důvodů. Většina dnešních obrazovek, ať už se jedná o samostatné monitory, displeje notebooků nebo televize, disponuje širokoúhlým poměrem stran, kde je horizontální rozměr znatelně větší než vertikální. Po umístění menu do horizontálního směru by nezbylo na obsah tolik místa a po stranách by ho bylo naopak zbytečně moc. Ze stejného důvodu jsem vynechal i hlavičku stránek, která je přítomna pouze v podobě obrázku na titulní straně.

Menu je pro jednoduchou orientaci logicky členěno na podkapitoly. Právě aktivní stránka je označena odlišnou barvou, proto návštěvník vždy ví, v které kapitole se nachází.

Velikost textu je volena tak, aby byl snadno čitelný. Důraz byl také kladen na typografickou správnost. Jelikož jazyk HTML nedisponuje schopností zápisu matematického textu, hledal jsem vhodné řešení. Našel jsem ho v podobě zobrazovacího enginu napsaném v jazyku JavaScript jménem MathJax. Tento doplněk se stará o vhodné zobrazení matematického textu, který do HTML kódu vkládáme jako řádkový. S jeho pomocí není problém korektně zobrazit všechny exponenty, znaky matematických operací a podobně. Uživatel má také možnost si text zkopírovat a použít ho v jiných programech nebo na internetových stránkách.

U většiny appletů nebo příkladů se nachází textová nápověda, která doplňuje zadání příkladu, osvětluje jeho propojení s příkladem a poskytuje návod, jak s konkrétním appletem pracovat. Tato nápověda je pro přehlednost označena kurzívou. V textu jsou obsaženy i definice, ty jsou označeny rámečkem. Příklady jsou od sebe vzájemně odděleny vodorovnou čarou, což pomáhá lepší orientaci.

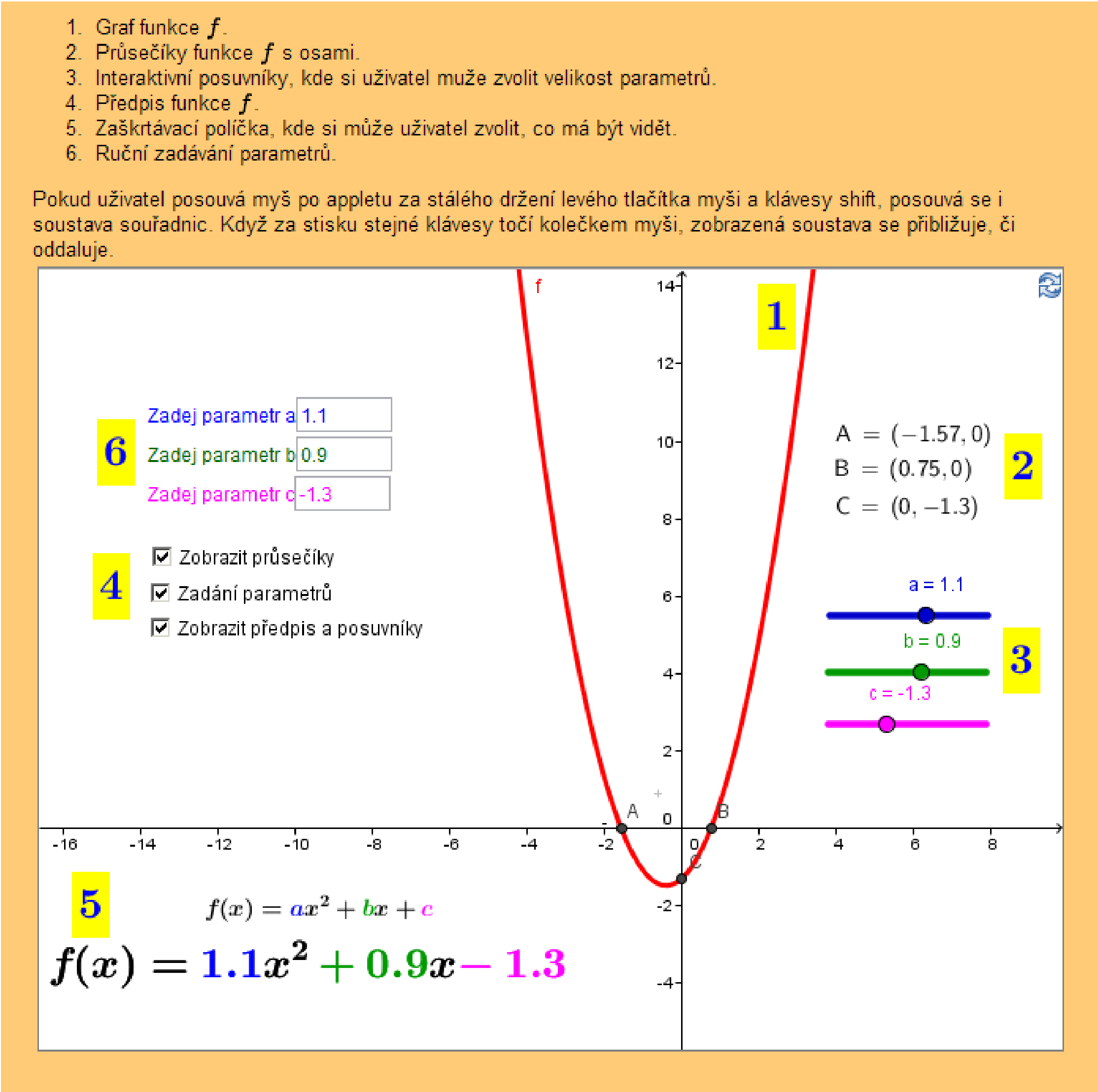
Aby internetové stránky splňovaly svoji funkci, bylo je potřeba naplnit vhodným obsahem. V následující kapitole popisuji některé části stránek a jejich přínos.

3.4.1 Titulní strana

Titulní stranu uvozuje velká hlavička v podobě ilustrativního obrázku s částí grafu funkce a nápisem „Funkce“. Jsou zde také informace, které velmi stručně informují návštěvníka o tom, co web nabízí a proč vznikl.

3.4.2 Návod

Druhou položkou v menu je část s názvem „Návod“. Ten informuje, jak jsou stránky členěny a informaci, že jsou na webu přítomny Java applety s odkazem na stránky programu GeoGebra, který byl použit pro jejich tvorbu. Nejdůležitější částí této sekce je návod v podobě názorného příkladu appletu i s popisky. To umožňuje uživateli si práci s appletem vyzkoušet a později využít všechny jeho možnosti. Vše je ukázáno na příkladu s kvadratickou funkcí. Jelikož je tento příklad appletu vzorový, je naplněn většinou ovládacích prvků, se kterými se uživatel může na tomto webu setkat (viz. Obrázek 8). ¨

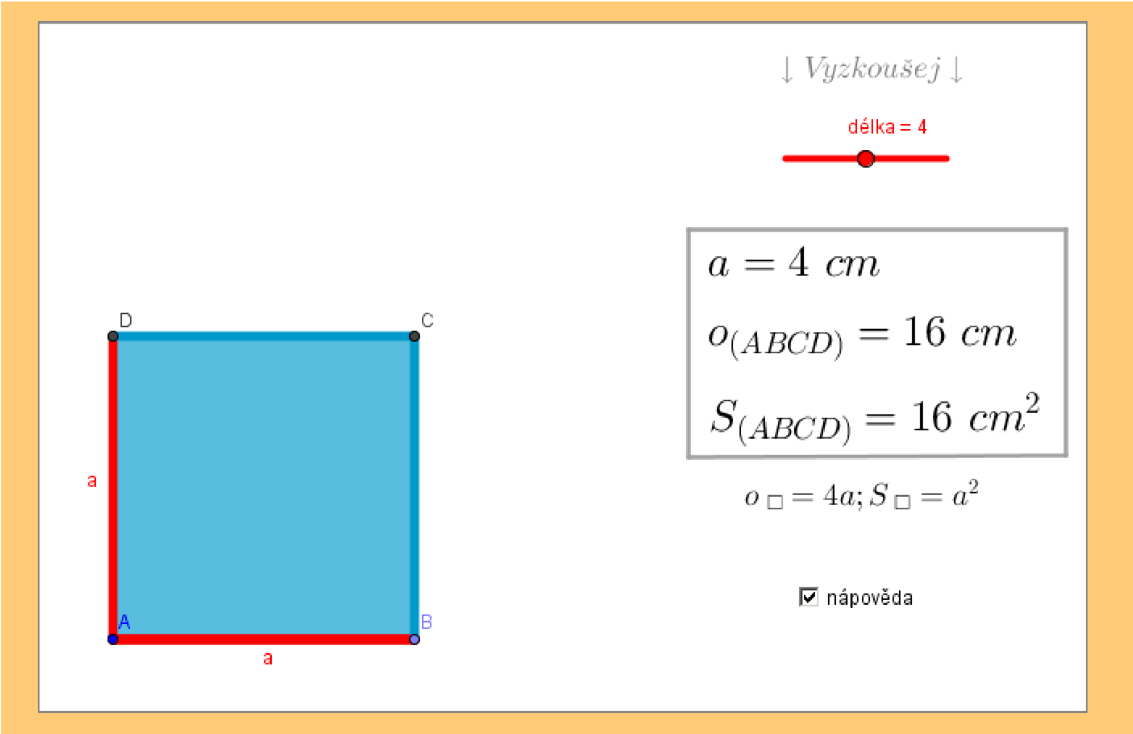


Obrázek 8: Applet s popisky

3.4.3 Seznamujeme se s funkcemi

Třetí kapitola s názvem „Seznamujeme se s funkcemi“ by měla žáka uvést do problematiky matematických funkcí. Je členěna na podkapitoly s názvy „Co je funkce?“, „Graf funkce“ a „Obor hodnot funkce.

Obsah první podkapitoly je zaměřen na obecné zavedení pojmu funkce. Je zde prezentována jako přiřazení čísla jinému číslu a ilustrována na závislosti velikosti objemu a obsahu čtverce na délce jeho strany. Pro znázornění tohoto vztahu je použit první applet, který obsahuje tři hlavní prvky: čtverec ABCD, interaktivní posuvník a tabulku s velikostí strany a, obsahu a objemu zobrazeného čtverce. Pokud uživatel mění pozici posuvníku, mění tím i velikost čtverce a údaje v tabulce (viz Obrázek 9). Text nad appletem nabádá k hledání vztahu mezi těmito číselnými údaji. Ten není problém najít, jedná se o vzorec pro výpočet obsahu a objemu čtverce. Díky tomu, že je tato závislost prezentována na něčem dobře známém a jednoduše pochopitelném, neodvádí se pozornost k důvodům této vazby. V appletu je i zaškrtávací políčko nápověda, které hledané vztahy zobrazí.



Obrázek 9: Applet demonstrující funkci jako přiřazení

Pod appletem je umístěno vyjádření vztahu pomocí tabulky. Opět zde platí, že závislosti v tabulce jsou snadněji pochopitelné pro jednoduché a nám dobře známe vztahy.

Pod vodorovnou čarou je umístěn další příklad s tabulkou nějaké funkce. Jedná se o funkci signum, ale to zde není uvedeno. Zde se uživatel naučí, že se dalším hodnotám x může přiřadit jedno y. Zbytek podkapitoly obsahuje teoretickou část s definicí funkce a zavádí pojem definičního oboru.

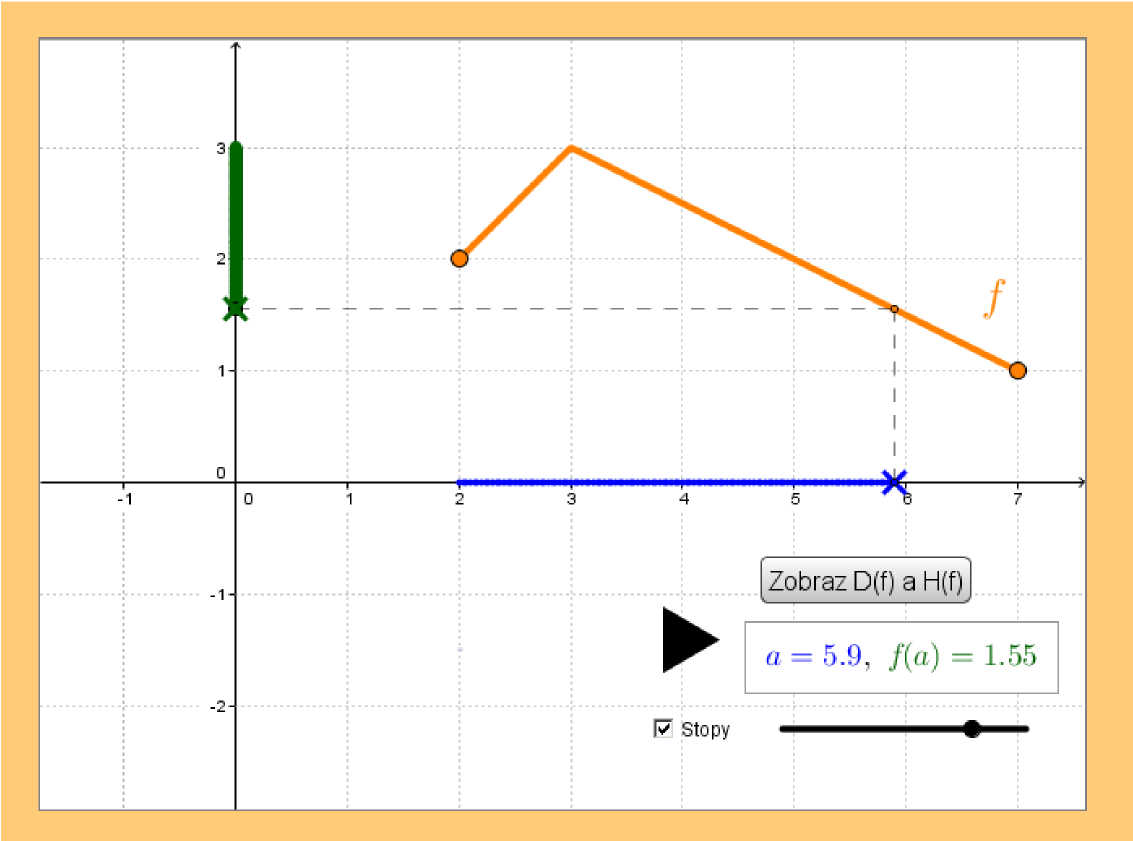
V další podkapitole s názvem „Graf funkce" se uživatel seznamuje se znázorněním funkce pomocí grafu. Pracuji zde opět s tématikou čtverce pomocí appletu s grafy dvou funkcí, ukazujících závislost délky strany čtverce na jeho obsahu a objemu. Tyto grafy jsou vepsané do jedné soustavy souřadnic a uživatel má rozhodnout, který je který (viz. Obrázek 10). Je zde i tlačítko s nápovědou, které zobrazí předpisy funkcí a správné řešení úlohy. Uživatel může také graf porovnat s tabulkou, kde jsou vypsány obsahy a objemy pro různá a. Další úloha ho dokonce nabádá, aby rozhodl, co platí pro tyto hodnoty u čtverců o straně, kde $a < 4$, poté $a > 4$ a nakonec $a = 4$. Tím je veden ke zjištění, že pokud se protínají grafy dvou funkcí, mají pro určitý argument stejnou funkční hodnotu, a pokud se nachází bod grafu pod jiným bodem (jeho druhá souřadnice je nižší), je i jeho funkční hodnota nižší.

Obrázek 10: Applet s grafy obsahu a objemu čtverce

V další části je graf funkce definován a následuje graf funkce signum. Jelikož má tato funkce odlišný definiční obor, vybízím zde uživatele, aby si grafy obou funkcí prohlédli a poté zkusili říct, jak se na nich tato odlišnost projeví.

Na konci je částečně řešená úloha, která umožní ověřit znalosti nabyté touto kapitolou. Applet zde zobrazuje lineární funkci s omezeným definičním oborem. Student by měl najít předpis funkce, určit definiční obor a doplnit tabulku s hodnotami argumentů a funkčních hodnot.

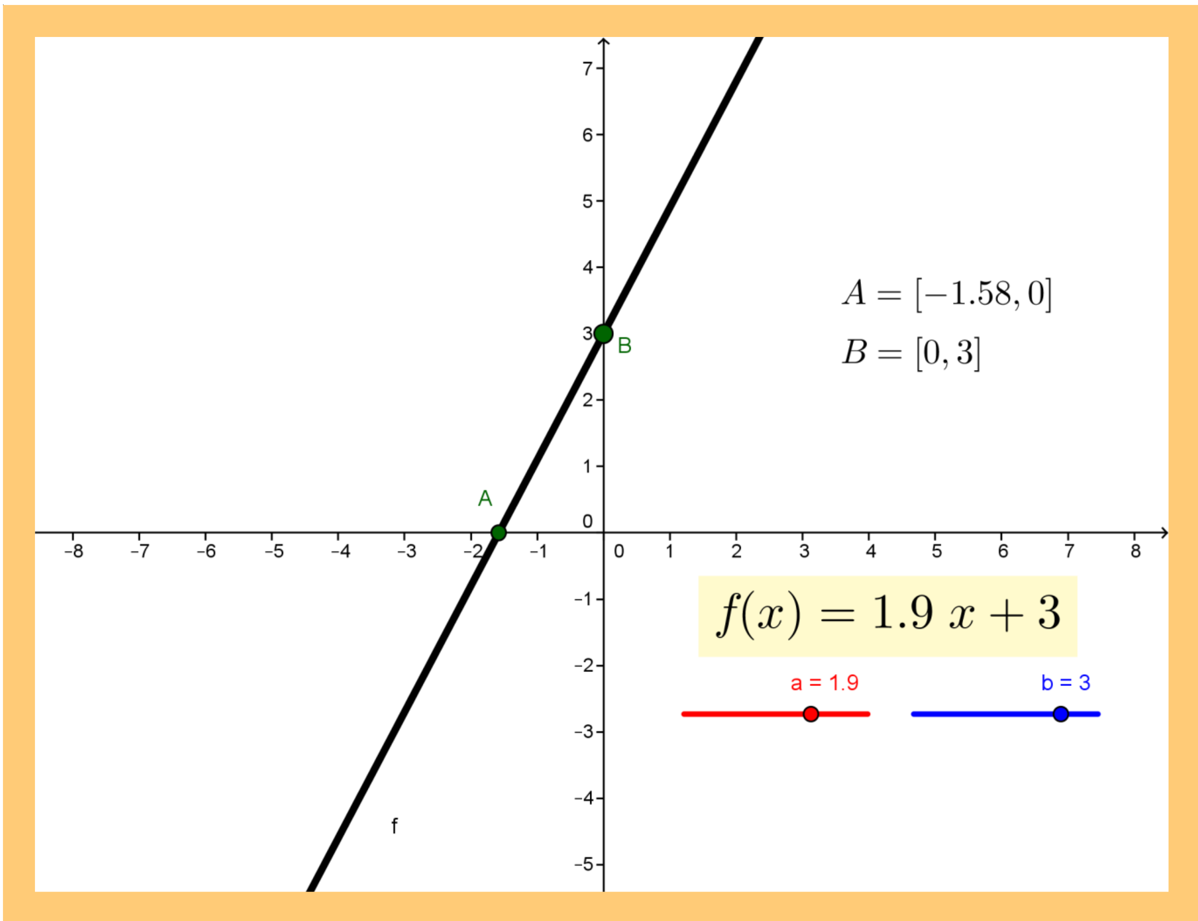
Třetí a poslední podkapitola „Obor hodnot funkce“ se stejnojmennou tématikou se snaží pracovat hlavně s názorností. Ta je dosažena pomocí appletů s různými druhy funkcí, na kterých je umístěn pohyblivý bod, zanechávající svoji stopu na osách soustavy. Jinak řečeno, v každé pozici $[x, y]$ se vytvoří stopy ve formě barevných bodů na souřadnici $[x, 0]$ a $[0, y]$. Poté co bod „projede“ funkci v celém jejím definičním oboru, vytvoří z těchto bodů dvě barevné čáry, znázorňující interval definičního oboru a oboru funkčních hodnot. To usnadňuje řešení úlohy – najít právě tyto dva obory. Uživatel může tlačítkem zobrazit správné řešení a tím si potvrdit správnost svého uvažování. K dispozici je i tlačítko pro spuštěn animace, ve které se zmíněný bod posouvá po celém průběhu funkce automaticky (viz. Obrázek 11).



Obrázek 11: Applet s grafickým znázorněním D(f) a H(f)

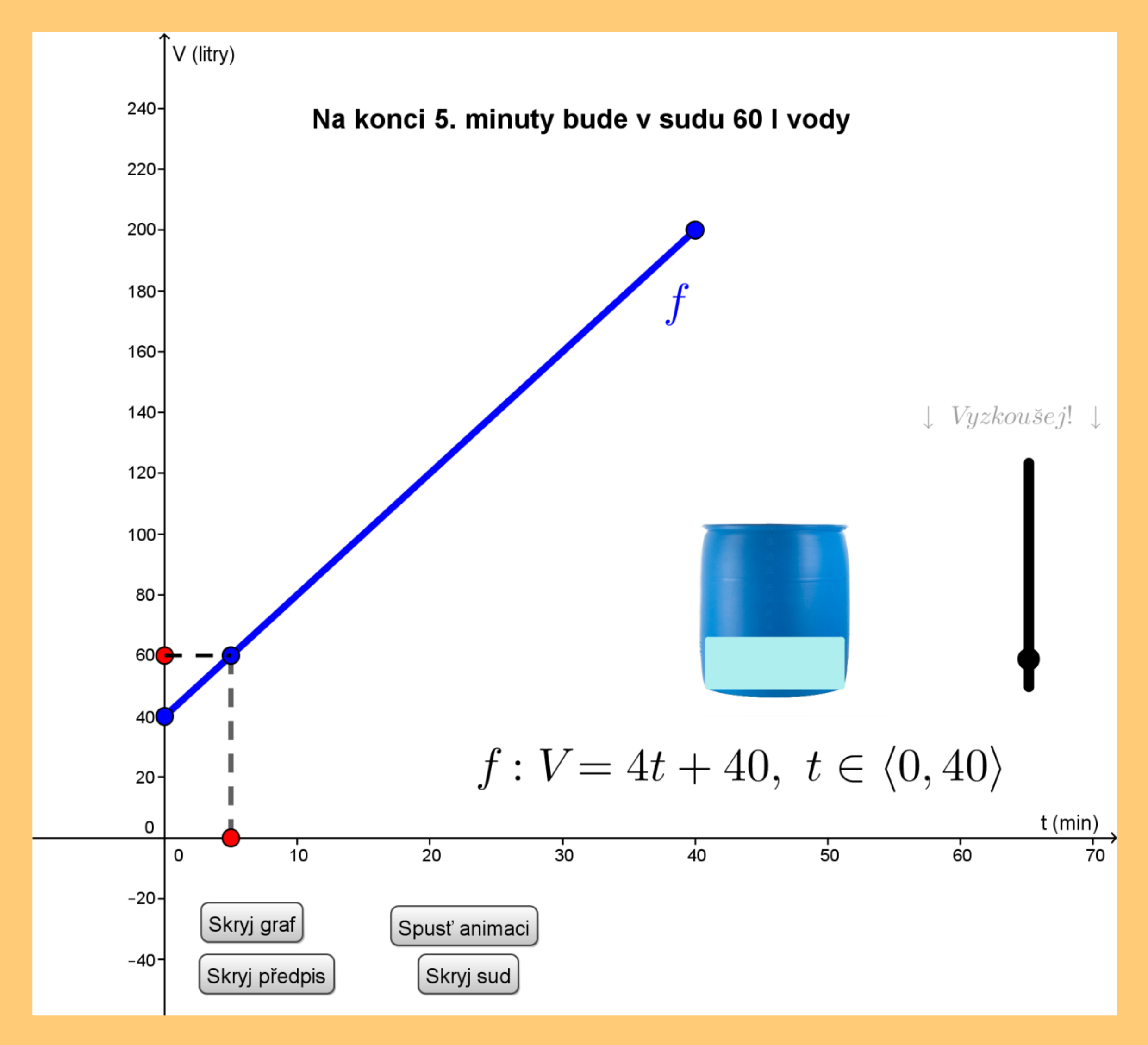
3.4.4 Lineární funkce

Po teoretickém úvodu této kapitoly následuje praktická část, začínající jednoduchou úlohou na zkoumání průběhu grafu lineární funkce. K tomuto účelu je zde applet, který jednu takovou funkci zobrazuje (viz. Obrázek 12). Uživatel může měnit její parametry a i b a pozorovat, jak se graf mění. To je vhodné pro naučení různých poznatků konstruktivním způsobem. Žák si zde poměrně snadno dokáže uvědomit, že parametr b posouvá funkci ve svislém směru, nebo že má parametr a vliv na sklon přímky grafu.



Obrázek 12:Applet zobrazující graf lineární funkce s volitelnými parametry

Další tři úlohy na sebe navazují a mají stejné téma – naplňování sudu pomocí čerpadla. V každé z nich jsou jiné počáteční podmínky nebo jiný průběh čerpaní vody. Závislost objemu vody na čase pak znázorňuje právě lineární funkce. U každé úlohy je přítomen applet, ve kterém jsou ale skoro všechny údaje skryty. Uživatel by ho měl podle textu úlohy použít až pro kontrolu svého řešení nebo v případě, že si nebude vědět rady. V appletu je interaktivní posuvník, jímž se mění čas od začátku čerpání. Změny v čase se projeví na několika prvcích, konkrétně je to textové pole ve tvaru „Na konci x. minuty bude v sudu y l vody.“, grafická demonstrace pomocí animovaného sudu, ve kterém se mění hladina vody v závislosti na čase a také bod na grafu funkce, spojený úsečkami s jeho souřadnicemi na ose x a y (viz. Obrázek 13). Opět je možné spustit animaci, která ukáže celý průběh naplňování sudu. Po stisku příslušného tlačítka je možnost zobrazit předpis funkce, jehož nalezení je úkolem příslušné úlohy.

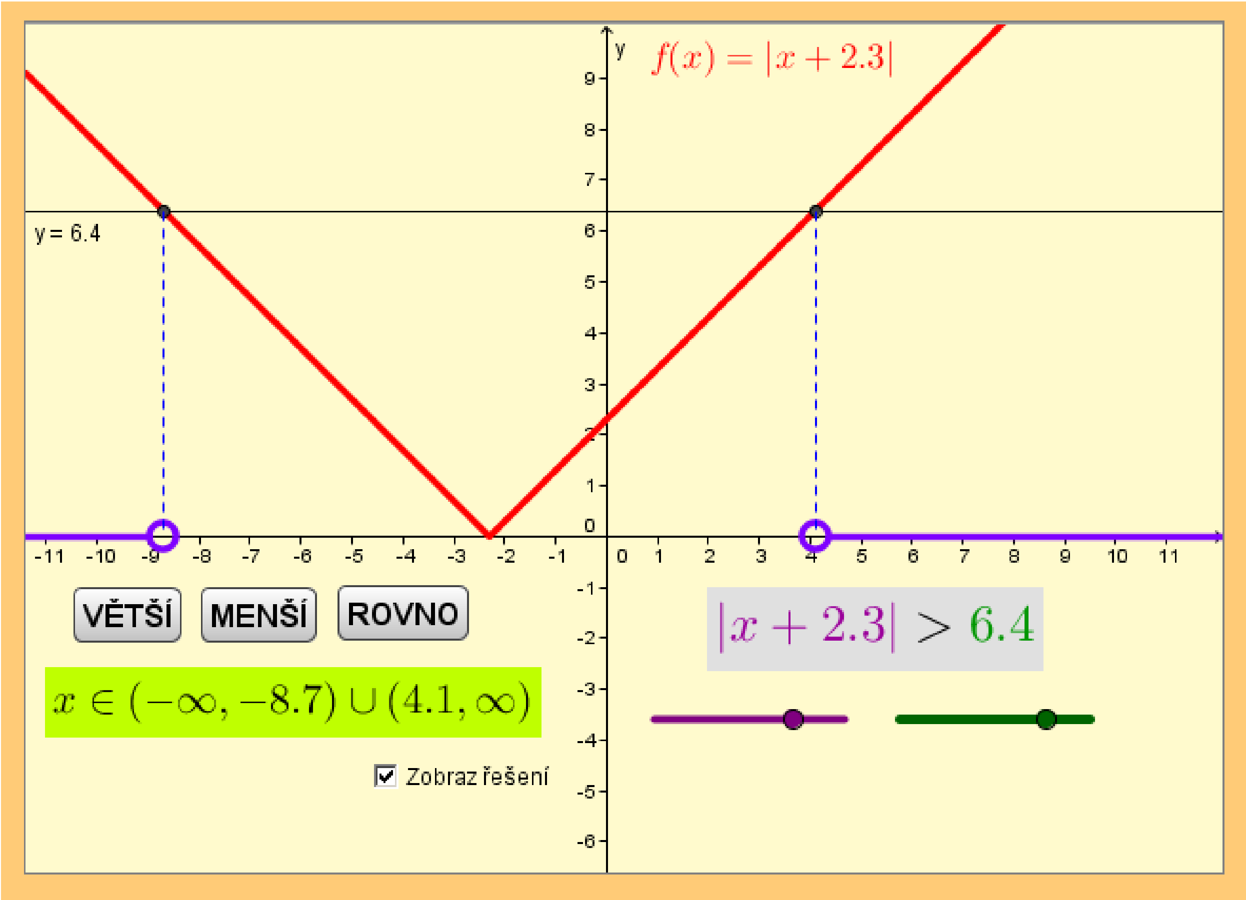


Obrázek 13: Applet se znázorněním řešení úlohy s lineární funkci

3.4.5 Funkce s absolutní hodnotou

V této kapitole se kromě teorie nachází tři úlohy na procvičování teorie funkcí s absolutní hodnotou. První z nich nabádá k nalezení grafu funkce $|x|$ za pomoci funkcí $f_x = x$ a $f_x = -x$.

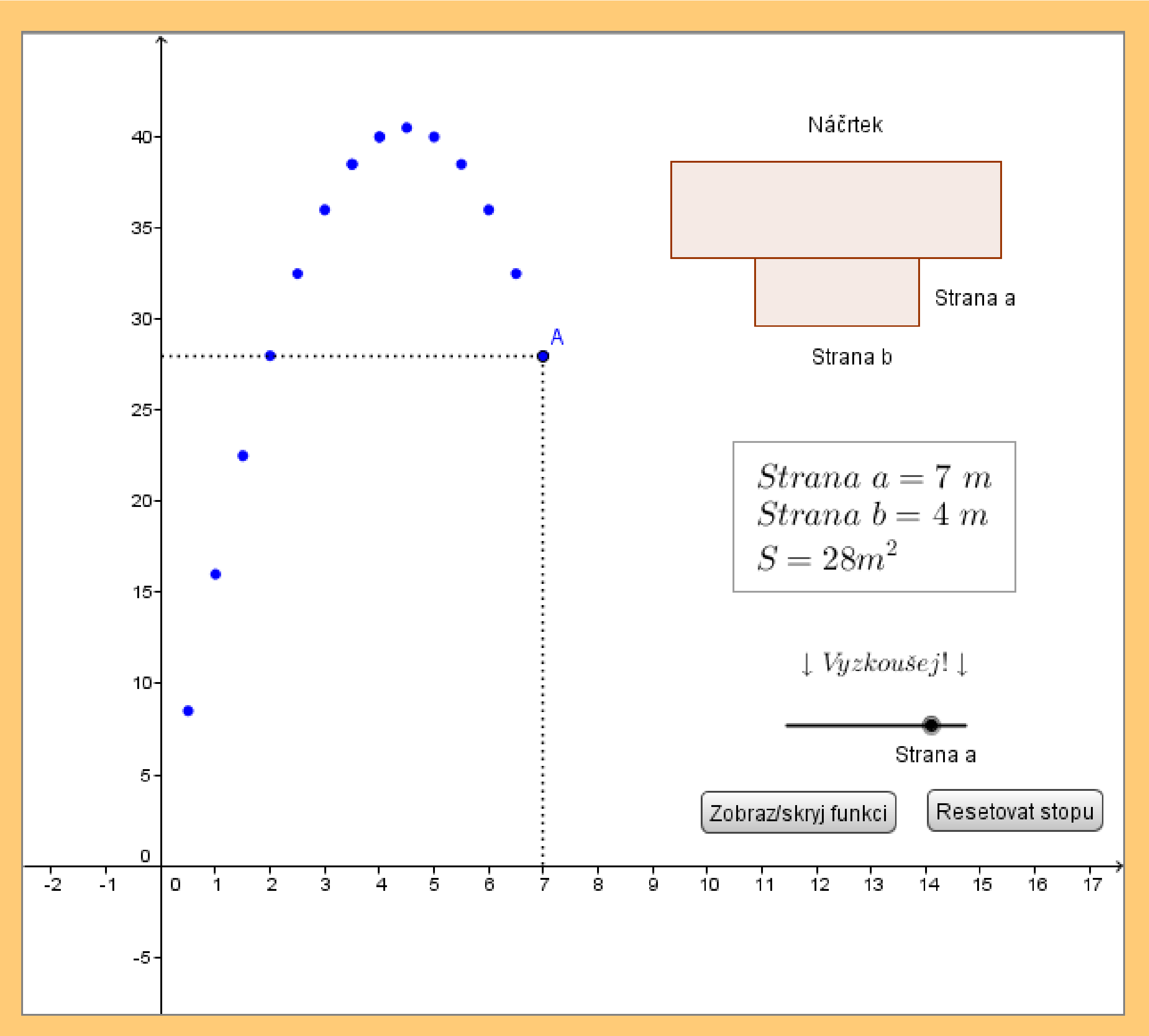
Další dva příklady obsahují rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou. Pracují s grafem $|x|$ a $|x + a|$, kde a je parametr volený uživatelem. Applety zde pomáhají řešit přidružené příklady pomocí grafického znázornění. Tlačítky uživatel volí mezi rovnicí a nerovnicemi se znaménkem $<$ nebo $>$. Po zaškrtnutí příslušného tlačítka se zobrazí řešení i v textové podobě.



Obrázek 14: Applet pro řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou

3.4.6 Kvadratická funkce

V úvodu této kapitoly jsem použil úlohu z učebnice Funkce (1994) od Doc. RNDr. Oldřicha Odvárka, DrSc., doplňující texty a výpočty jsem podle potřeby upravil. Text úlohy zní: „Zemědělec chce vybudovat pro kuřata výběh pravoúhelníkového tvaru, přitom jedna strana bude částí stěny hospodářské budovy. K dispozici má 18 metrů pletiva. Určete rozměry výběhu, tak aby byl co největší.“ Učebnice nabádá k nalezení jednotlivých bodů funkce a zobrazení v grafu. My můžeme tuto práci ulehčit pomocí appletu, který nám body zobrazuje postupně. Je zde i tabulka zobrazující údaje o velikosti ohrady a jejím obsahu v souvislosti na pozici bodu v grafu.



Obrázek 15: Applet s kvadratickou funkcí

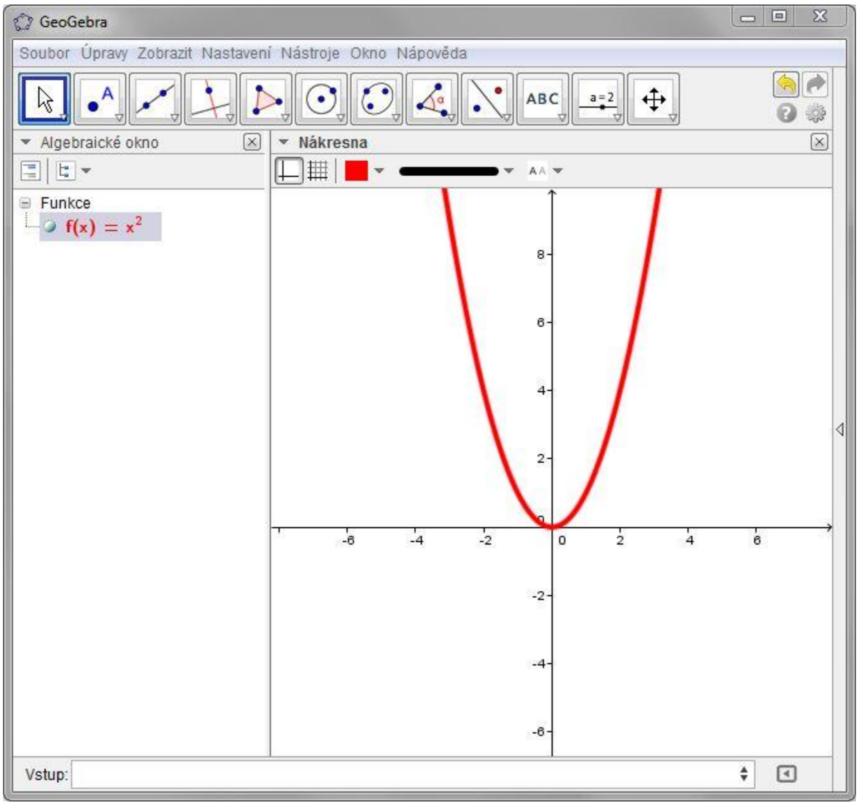
3.4.7 Souhrnný test

Jako poslední položku menu jsem zvolil souhrnný test. Zde si uživatel může ověřit své znalosti pomocí deseti otázek z různých kapitol, kterým se stránky věnují. U každé otázky je možnost zaškrtnout jednu ze tří odpovědí. Za poslední otázkou se nachází tlačítko s nápisem „Zkontrolovat“. Po jeho stisknutí se zobrazí oznamovací okno s počtem správně zodpovězených otázek a zároveň se v testu uživatelem špatně vybrané odpovědí zbarví červeně a správné zeleně.

4 Vývojové prostředí

4.1 Program Geogebra

Program Geogebra je dynamický software vytvořený pro simulaci a řešení různých matematických úloh. Dokáže propojit dva pohledy na problém jak pomocí grafického řešení, tak algebraického. Jeho autorem je Mark Hohenwarter. [6]



Obrázek 16: Rozhraní programu Geogebra

Ačkoliv jsem se seznámil s Geogebrou až při tvorbě této práce, naučit se s ní pracovat mi nezabralo mnoho času. Uvedu zde stručný popis toho, jak se s programem pracuje. Základním ovládacím prvkem je pole Vstup, které slouží na vkládání příkazů, které má Geogebra provést. Například příkaz *f(x) = x^2* vytvoří funkci f s předpisem $f(x) = x^2$. Graf této funkce se zobrazí v tzv. Nákresně a její předpis se zobrazí v tzv. Algebraickém okně, ve kterém se nachází seznam všech bodů, funkcí, proměnných apod., se kterými program pracuje. (viz Obrázek 16). Je nutné poznamenat, že pozice těchto oken je značně modulární. Mohou být seskupeny v hlavní obrazovce programu, dají se rozdělit a různě přesouvat. Pokud má uživatel dva monitory, jde umístit nákresnu na jeden monitor a zbytek programu na druhý. To je praktické, pokud je na nákresně mnoho prvků a je pro ni potřeba hodně místa. V horní části programu je panel s nástroji. Není potřeba vypisovat jejich seznam, mnoho jich slouží hlavně v geometrických konstrukcích, ke kterým je Geogebra také vhodná, ale pro potřeby této práce není potřeba se jimi zabývat. Z popisu jsou vynechány i další funkce, program je tak komplexní, že by jeho popis zabral mnoho stran.

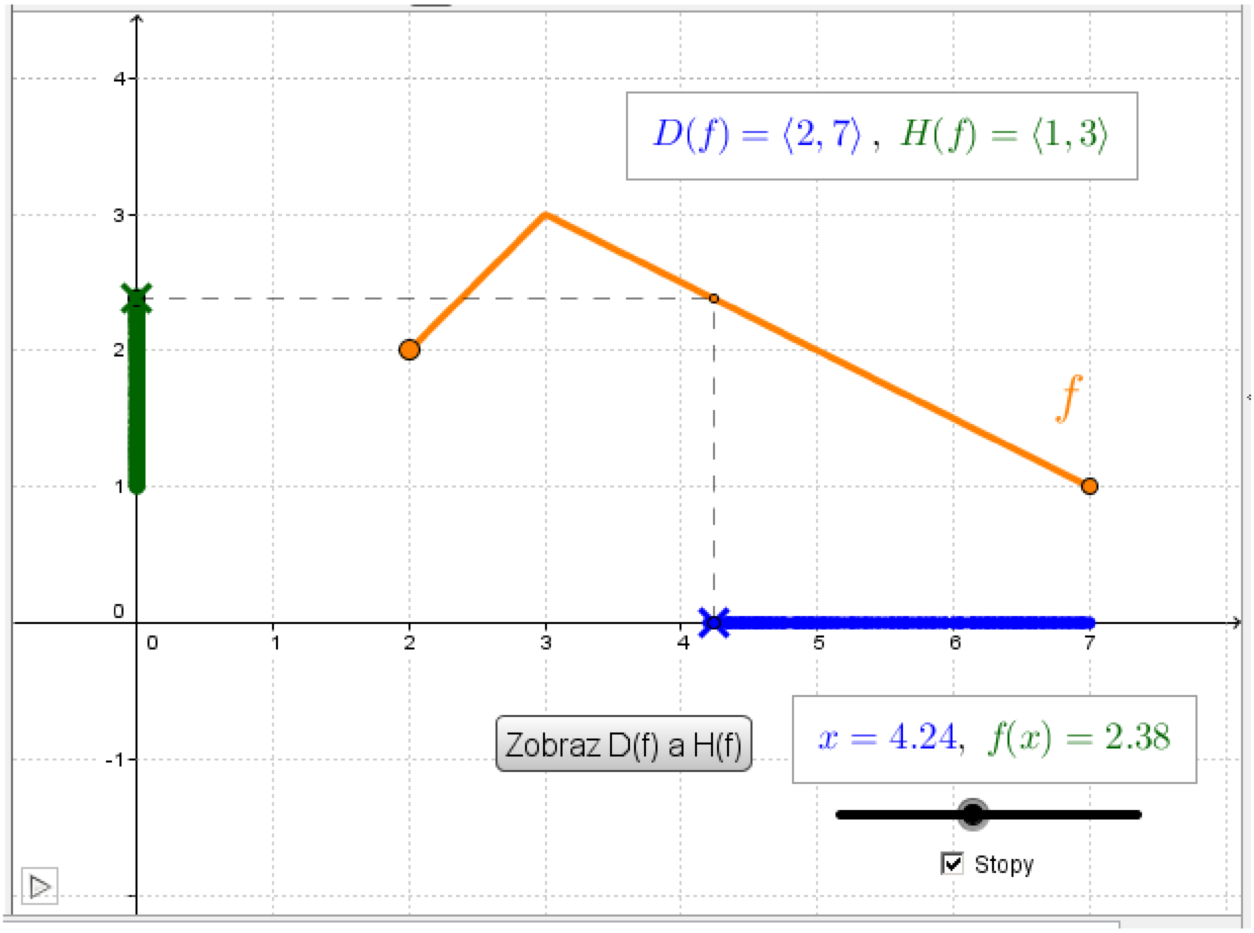
Pokud uživatel v Geogebře vytvoří nějaký projekt a chce ho prezentovat, má více možností, jak to udělat. Pokud je potřeba zachovat interaktivní prvky, které jsou v programu obsaženy, může svoje dílo prezentovat jako Java applet v internetové stránce, nebo jej šířit jako spustitelný soubor ve formátu ggb. Ten je ale možné spustit pouze na těch počítačích, kde se nachází kopie programu Geogebra. Jako jediný dovoluje editovat a znovu ukládat jeho podobu. Pokud uživatel interaktivitu nepotřebuje, může exportovat nákresnu pouze jako rastrový obrázek.

Pro tvorbu Java appletů jsem si program Geogebra vybral z několika důvodů. Prvním z nich je fakt, že je k dispozici zcela zdarma pro nekomerční využití. To dovoluje její používání volně nejen na školních počítačích, ale program si mohou žáci nainstalovat na své počítače doma a v případě zájmu by si tak mohli tvořit applety vlastní. Dalším důvodem je jeho databáze příkladů vytvořených uživateli. Na webových stránkách programu lze najít stovky různě tematicky zaměřených appletů, jejichž zdrojové soubory ggb jsou volně ke stažení. Výhodou také je, že program disponuje velkou komunitou uživatelů, včetně mnoha Čechů. Díky nim jsou oficiální stránky Geogebry přeloženy do českého jazyka a program samotný je lokalizován do češtiny. Tito lidé přispívají do fóra na stránkách programu, kde se nezkušený člen může dotazovat.

Při užívání programu jsem se setkal také s několika jeho nedostatky. Hlavním z nich jsou omezené možnosti exportu práce do podoby Java appletu. Program vždy vygeneruje kód celé webové stránky, ze které jsem musel vybírat kód appletu, a ten následně vkládat do svých stránek. Další problém byl v stabilitě appletů, které se na stránce občas nenačetli. Tuto chybu nelze s jistotou přikládat aplikaci, mohla být způsobena rozhraním Java.

4.2 Popis tvorby appletu

Nyní si ukážeme, jak tvorba appletu probíhá krok za krokem. Pro tento účel jsem si vybral příklad na definiční obor a obor hodnot funkce. Tento applet bude obsahovat graf neprosté funkce s omezeným definičním oborem, na které bude umístěn bod. Pozice tohoto bodu bude znázorněna barevnými křížky na osách soustavy souřadnic. Pomocí posuvníku bude uživatel měnit pozici bodu na funkci v celém jejím definičním oboru. Křížek, který se pohybuje po ose y bude poté názorně ukazovat, že obor hodnot je také omezený a je roven určitému intervalu (křížek se bude souvisle pohybovat po ose y na úseku vymezeném definičním oborem). Pro větší efektivnost bude moci student zapnout i stopy, které budou zanechávat křížky na osách souřadnic. Dále bude možno spustit animaci, při které se bude pozice bodu na funkci měnit sama (viz. Obrázek 17).



Obrázek 17: Hotový applet

Tvorba appletu začíná spuštěním programu a zobrazení potřebných oken. My budeme potřebovat okno *Nákresna* a *Algebraické okno*. Když máme okna programu připravená, začneme vkládat jednotlivé ovládací prvky. Jako první vložíme posuvník, za pomoci kterého bude uživatel ovládat pozici bodu na funkci, který budeme nazývat C. Tento posuvník bude měnit hodnotu proměnné a, která bude zároveň souřadnice bodu C na ose x. Interval hodnot které může a nabývat omezíme na množinu $D(f)$ zamýšlené funkce, například $\langle 2; 7 \rangle$. V následujícím kroku definujeme samotnou funkci f, kterou tvoří dvě funkce s různým předpisem a definičním oborem: $f_1(x) = x, x \in \langle 2; 3) \wedge f_2(x) = -\frac{x}{2} + 3.5, x \in \langle 3; 7 \rangle$, pomocí příkazu:

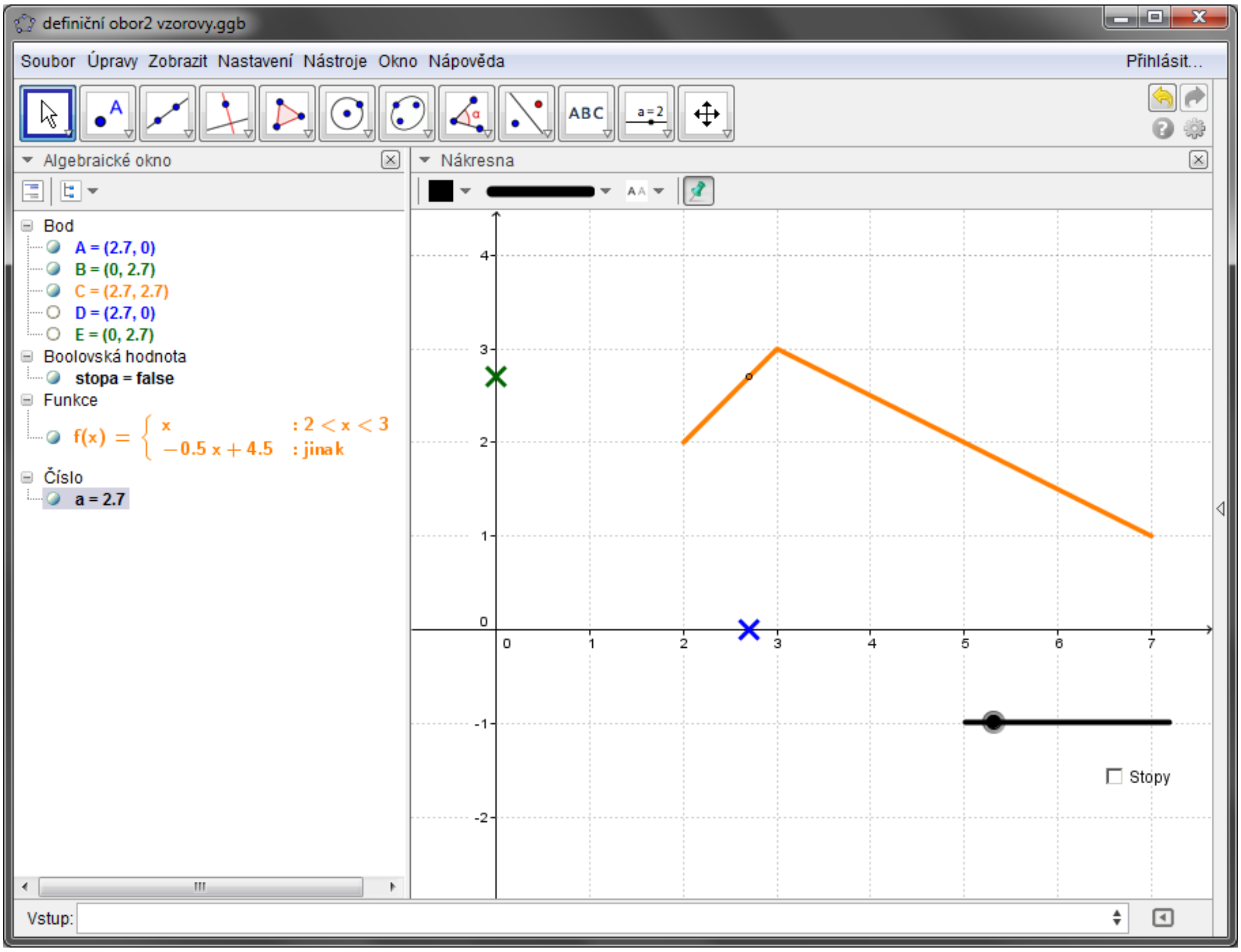
Funkce[Kdyz[2 < x < 3, x,-0.5 x + 4.5], 2, 7].

Dále vytvoříme bod C na souřadnici $[a, f(a)]$ příkazem

C=[a,f(a)],

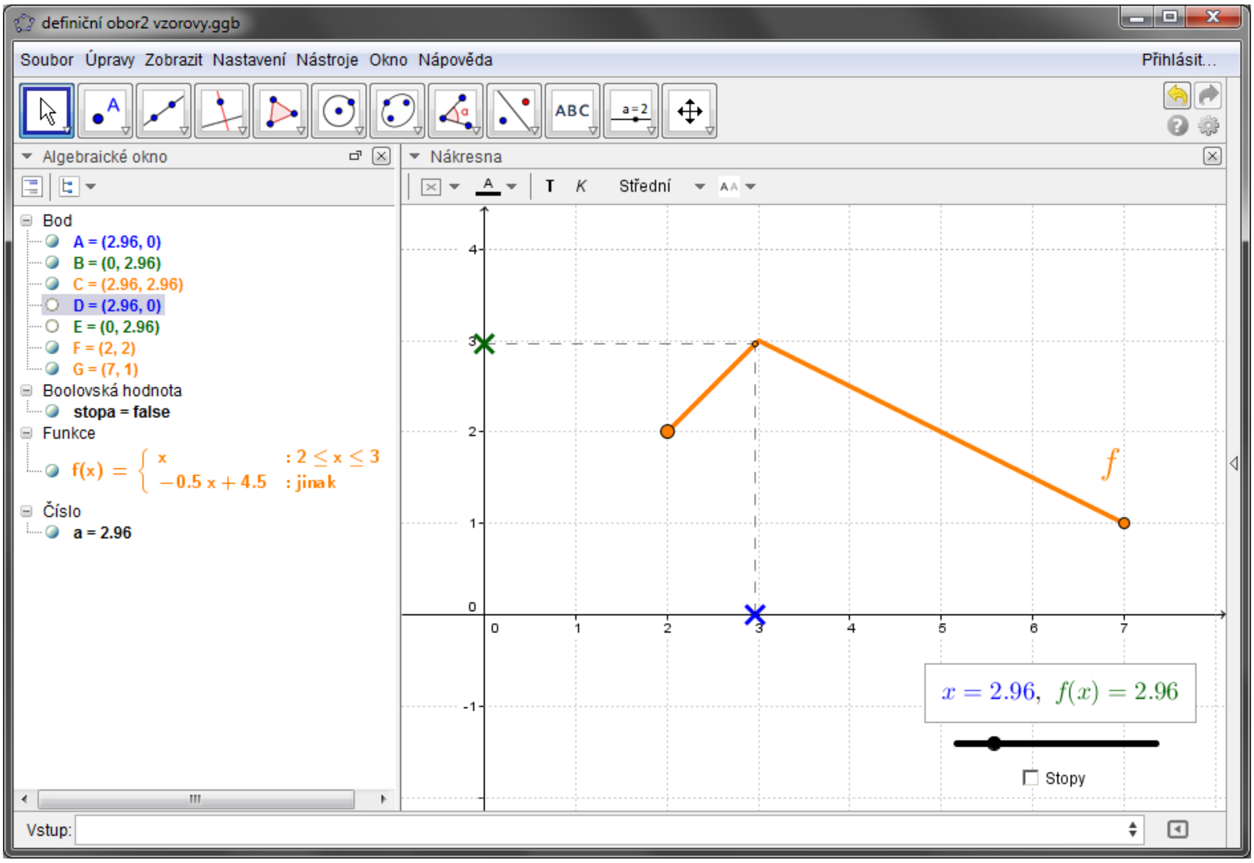
a obdobnými příkazy body A, B na osách x a y se souřadnicemi $A = [a, 0]$ a $B = [0, f(a)]$. Abychom mohli vytvořit vypínatelné stopy těchto bodů, vytvoříme ještě dva identické body

$D = A$ a $E = B$, které tuto stopu budou zanechávat. Tato funkce se dá nastavit v okně nastavení těchto bodů. Přidáme také zaškrtávací pole s nápisem „Stopy“, na kterém závisí, zda jsou body D a E zobrazeny. Nyní práce po změně některých vlastností prvků, jako je barva nebo velikost, vypadá takto:

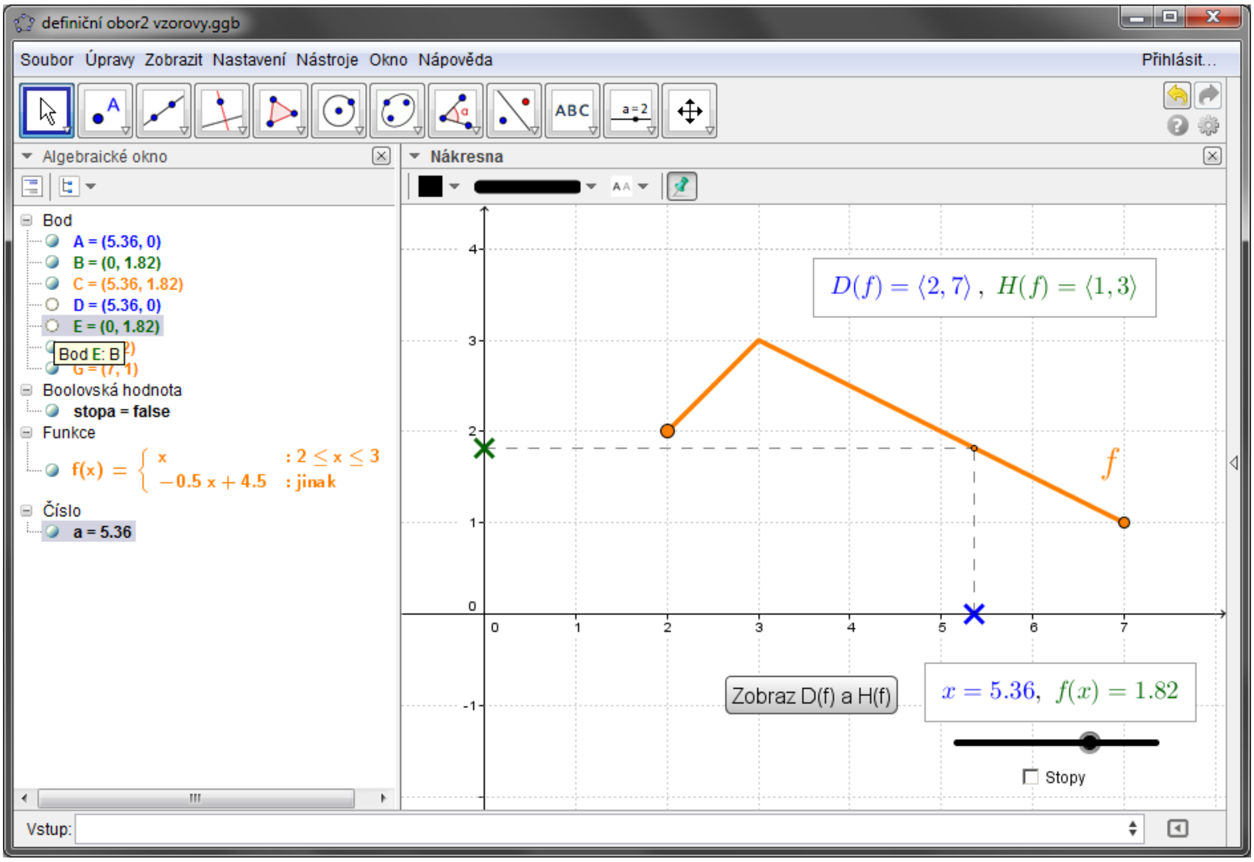


Obrázek 18: Rozpracovaný applet

Pro lepší přehlednost spojíme bod C s body A a B úsečkami, které nastavíme jako čárkované. Graficky znázorníme omezenost definičního oboru funkce jako dva body v podobě plných kolečck v krajních bodech definičního oboru, tedy $F = [2, 2]$ a $G = [7, 1]$. Pro žáky, kterým dělá problém číst z grafu, připravíme textové pole, které zobrazuje hodnotu proměnné a a funkční hodnotu funkce f pro a. Po přidání popisku funkce f je program z velké části hotový (viz obrázek). Zbývá přidat nápovědu, která po kliknutí zobrazí definiční obor a obor hodnot funkce f. Ta se vytvoří textovým polem, s intervaly oborů, a tlačítkem, které zobrazí nebo skryje toto textové pole (to je samozřejmě nastaveno tak, aby po spuštění appletu bylo skryté).



Obrázek 19: Stav tvorby appletu po přidání textového pole



Obrázek 20: Finální stádium tvorby appletu

Závěr

Podařilo se mi vytvořit internetové stránky, které slouží k výuce funkcí na střední škole. Obsahují teorii funkcí, řešené příklady s applety, neřešené příklady a interaktivní test, na kterém si můžou žáci vyzkoušet svoje znalosti. Vše je přehledně uspořádáno do kapitol. K dispozici je i návod, jak se stránkami pracovat.

Za největší přínos těchto stránek považuji nasazení příkladů s applety. Ty využívají možností výpočetní techniky k zpestření výuky a zapojují žáka konstruktivním způsobem. Aby mohli být applety plně využity, jsou doplněny o vysvětlující texty.

Stránky mohou být nápomocné při domácí přípravě studenta nebo jako didaktická pomůcka pro učitele, který by stránky používal při vyučování.

Do budoucna by bylo dobré stránkám vytvořit vlastní doménu, a poté je nějakým jednoduchým způsobem mezi žáky prezentovat, například pomocí sociálních sítí. Zde by mohli uživatele na základě zkušeností přidávat komentáře a recenze, podle kterých by se mohl odvíjet další vývoj stránek.

Seznam použitých zdrojů

[1] MUSCIANO, Chuck a Bill KENNEDY. *HTML a XHTML: kompletní průvodce*. Vyd. 1. Praha: Computer Press, 2000. ISBN 80-722-6407-9.

[2] HEROUT, Pavel. *Učebnice jazyka Java*. 1. vyd. České Budějovice: Kopp, 2001. ISBN 80-723-2115-3.

[3] Java applet. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. Aktualizováno 1. 11. 2013 [vid. 1. 12. 2013]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Java_applet

[4] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce*. 2. vyd., v Prometheu 1. Praha: Prometheus, 1993. ISBN 80-858-4909-7.

[5] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-807-1963-561.

[6] Geogebra [online]. [vid. 12. 10. 2013]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/cms/cs/

Seznam příloh na CD

Na přiloženém CD naleznete:

-Složku „WWW"   - adresář s internetovými stránkami

-stránky se spustí souborem index.html